შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

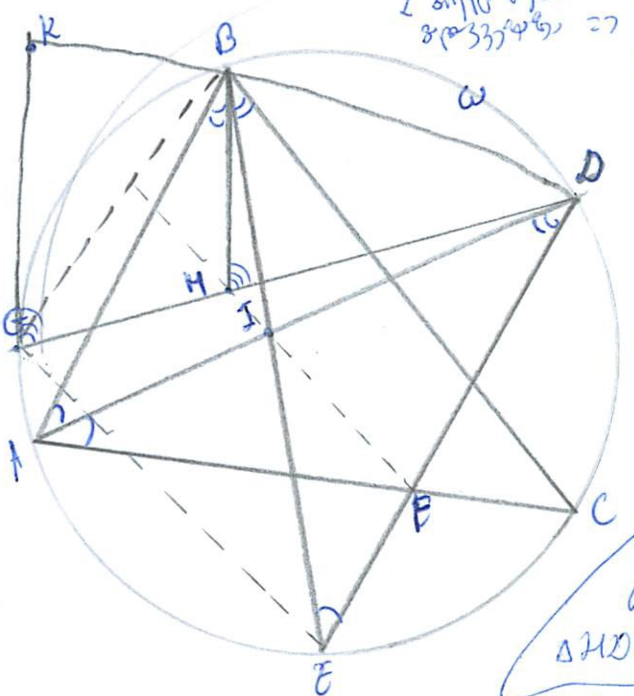
შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 1	25.04.2015/ მათ/III/ 602

ამოცანა № 1

გვერდი № 1



I ბისექტრისების გადაკვეთაა => $\begin{cases} AD\ \angle BAC\text{-ს ბისექტრისა} \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC} \\ BE\ \angle ABC\text{-ს ბისექტრისა} \Rightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EC} \end{cases}$

$\angle BED = \angle BAD$

$\angle ADE = \angle ABE$

$\triangle HDE \sim \triangle GDE$ (რადგან $FI \parallel EG$)

$\triangle ABC$ და $\triangle GDE$ ერთი და იმავე წრეწირში არიან ჩახაზული. [illegible]

[illegible]

$\angle KGH = \angle BHD$

თუ KG ω-ს ეხება, BH ეხება $\triangle HDF$-ზე შემოხაზულ წრეწირს.

ვაჩვენოთ G წერტილიდან BH-ის პარალელური [illegible] K [illegible] BD წრფესთან გადაკვეთის წერტილი

თუ KG ω-ს ეხება, $KG^2 = KB \cdot KD$ ანუ $\triangle KGB \sim \triangle KDG$ =>

[illegible] => $\angle KGB = KDG$ [illegible] და $\angle KGD = \angle GBK$. [illegible]

~~[illegible]~~ $\cancel{\angle KDG = \angle BDG = \frac{GB}{2}, \angle KGB = \frac{GB}{2}, \angle}$

5

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 1

25.04.2015/ მათ/III/ 602

ამოცანა № 2

გვერდი № 1

$a_n = f(a_{n-1})$ $b_n = f(b_{n-1})$

განვიხილოთ 4 შემთხვევა:

1) $a_{n-1} < \frac{1}{2}$; $b_{n-1} < \frac{1}{2}$, მაშინ $(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) = (a_{n-1} + \frac{1}{2} - a_{n-1})(b_{n-1} + \frac{1}{2} - b_{n-1}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} > 0$ ნებისმიერი ასეთი a_{n-1} და b_{n-1}-სთვის

2) $a_{n-1} \geq \frac{1}{2}$; $b_{n-1} \geq \frac{1}{2}$, მაშინ $(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) = ((a_{n-1})^2 - a_{n-1})((b_{n-1})^2 - b_{n-1})$ რადგანაც $0 < a < b < 1$ და $f:(0;1) \to (0;1)$, $a_{n-1} < 1$ და $b_{n-1} < 1 \Rightarrow (a_{n-1})^2 < a_{n-1}$ და $(b_{n-1})^2 < b_{n-1}$ ანუ $(a_{n-1})^2 - a_{n-1} < 0$; $(b_{n-1})^2 - b_{n-1} < 0$ და მათი ნამრავლი მეტი იქნება 0-ზე ყველა ასეთი a_{n-1} და b_{n-1}-სთვის.

3) $a_{n-1} < \frac{1}{2}$; $b_{n-1} \geq \frac{1}{2}$

$$(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) = (a_{n-1} + \frac{1}{2} - a_{n-1})((b_{n-1})^2 - b_{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{((b_{n-1})^2 - b_{n-1})}_{\text{ეს უარყოფითია}} < 0$$ ნებისმიერი $b_{n-1} < 1$-სთვის

4) $a_{n-1} \geq \frac{1}{2}$; $b_{n-1} < \frac{1}{2}$

$$(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) = ((a_{n-1})^2 - a_{n-1}) \cdot \frac{1}{2} < 0$$ ნებისმიერი $a_{n-1} < 1$-სთვის.

ანუ ეს რომ დავამტკიცოთ უნდა მოიძებნოს ისეთი m რომლისთვისაც $a_m < \frac{1}{2}$; $b_m \geq \frac{1}{2}$ ან $a_m \geq \frac{1}{2}$; $b_m < \frac{1}{2}$

ვაჩვენოთ, რომ a და b-სთვის ~~[illegible]~~ ეს m [illegible] არსებობს.

1

შევნიშნოთ: თუ $f(x)=x+\frac{1}{2}$ $f(x+\frac{1}{2})=(x+\frac{1}{2})^2$ ($x+\frac{1}{2}$ ყოველთვის $\geq\frac{1}{2}$ არაუარყოფითი რიცხვის x-ისთვის).

განვიხილოთ სადაც a_k და b_k და მათი სხვაობა b_k-a_k

$a_k+\frac{1}{2}$-სა და $b_k+\frac{1}{2}$-ის შორის სხვაობა იგივე b_k-a_k არის.

$(b_k)^2-(a_k)^2=(b_k-a_k)(b_k+a_k)$ ამ შემთხვევაში კი ის სხვაობა b_k+a_k-ჯერ გაიზრდება. ვთქვათ, ჯერ არ გვქონია ისეთი შემთხვევა, რომ $a_m<\frac{1}{2}$; $b_m\geq\frac{1}{2}$ ან $a_m\geq\frac{1}{2}$; $b_m<\frac{1}{2}$. სიმეტრიის b_k+a_k ჯერ იქნება დადებითი ~~$b_{k+1}-a_{k+1}>0$, თუ~~ ~~b_k~~ თუ $b_k-a_k>0$, $b_{k+1}-a_{k+1}>0$ ანუ ის შემთხვევა, როცა $a_m\geq\frac{1}{2}$ და $b_m<\frac{1}{2}$ შეუძლებელია, [illegible] $a_m<\frac{1}{2}$; $b_m\geq\frac{1}{2}$ შემთხვევა.

ვთქვათ, k ისეთია, რომ $a_k<\frac{1}{2}$; $b_k<\frac{1}{2}$

$a_{k+1}=a_k+\frac{1}{2}$ $b_{k+1}=b_k+\frac{1}{2}$

$b_{k+2}-a_{k+2}=(b_k+\frac{1}{2})^2-(a_k+\frac{1}{2})^2=(b_k-a_k)(b_k+a_k+1)$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 1

25.04.2015/ მათ/III/ 602

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

რადგანაც განტოლება სიმეტრიულია x-ის და y-ის მიმართ, ჩვენ შეგვიძლია, ზოგადობის დაურღვევლად ვიგულისხმოთ, რომ $x \geq y$

$7x^2-13xy+7y^2=(x-y+1)^3$

$7(x-y)^2+xy=(x-y+1)^3$ $\quad x-y=a \quad xy=b$

$7a^2+b=(a+1)^3$

a დადებითია.

$7a^2+b=a^3+3a^2+3a+1$

$b=a^3-4a^2+3a+1$

x და y რომ იყოს მთელები უნდა იყოს:

$y=x-a$

$x(x-a)=b$

$x^2-ax-b=0$

$D=a^2+4b=$ სრული კვადრატი

$a^2+4a^3+16a^2+12a+4=n^2 \quad (n \in N)$

$4a^3+17a^2+12a=(n-2)(n+2)$

$a(4a^2+17a+12)=(n-2)(n+2)$

~~რადგანაც $4a^2+17a+12$~~

$a^2+4a(a-3)(a-1)+4=n^2$ $\quad \begin{cases}(n-a)(n+a) \vdots 4 \\ (n-2)(n+2) \vdots a\end{cases}$

$7x^2-13xy+7y^2=(x-y+1)^3$

$7x^2-13xy+7y^2=x^3-y^3+3xy^2-3x^2y-6xy+3x^2+3y^2+$
$+3x-3y+1$

3

$x^3-y^3+3xy^2-3x^2y+7xy-4x^2-4y^2+3x-3y+1=0$

$x^3+(3y-4)x^2+(3y^2+7y+3)x-4y^2-3y+1=0$

$(x-y)(x^2+xy+y^2)+3xy(y-x)+7x(y-x)+3x^2-4y^2+3(x-y)+1=0$

$(x-y)(x^2+xy+y^2-3xy-7x+3)+\cancel{3x^2-4y^2+1=0}+3(x+y)(x-y)+$
$+(1-y)(1+y)=0$

$(x-y)(x^2+y^2-2xy-7x+3+3x+3y)+(1-y)(1+y)=0$

$(x-y)(x^2+y^2-2xy-4x+3y+3)+(1-y)(1+y)=0$